Chapitre 39

Espaces préhilbertiens réels

Plan du chapitre

Hypothèse

Dans tout ce chapitre, E désigne un $\mathbb{R}$-e.v.
À partir de la section 2, E désigne un espace préhilbertien réel, dont on note $(\cdot \mid \cdot)$ le produit scalaire et $||\cdot||$ la norme euclidienne associée (cf définitions plus loin).

1 Produit scalaire

1.1 Définition

On rappelle la définition de forme bilinéaire (sur le $\mathbb{R}$-e.v. E) :

Définition 39.1 (Forme bilinéaire)

On dit que $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire si φ est linéaire par rapport à chacune de ses 2 variables :

- Pour tout y_0 fixé dans E, l'application suivante est linéaire :

$$\begin{aligned} E &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \varphi(x, y_0) \end{aligned}$$

- Pour tout x_0 fixé dans E, l'application suivante est linéaire :

$$\begin{aligned} E &\to \mathbb{R} \\ y &\mapsto \varphi(x_0, y) \end{aligned}$$

Remarque. Pour tout $y \in E$, on a $\varphi(0_E, y) = 0$ et de même $\varphi(x, 0_E) = 0$.

Définition 39.2

Soit φ une forme bilinéaire sur E. On dit que :

- φ est symétrique si $\quad \forall x, y \in E \quad \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$
- φ est positive si $\quad \forall x \in E \quad \varphi(x, x) \geq 0$
- φ est définie si $\quad \forall x \in E \quad (\varphi(x, x) = 0 \implies x = 0)$

On dira que φ est définie positive si φ est définie et positive.

Définition 39.3 (Produit scalaire)

Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$. On dit que φ est un produit scalaire sur E si :

1. φ est bilinéaire.
2. φ est symétrique.
3. φ est définie positive, i.e. :
   (a) φ est positive.
   (b) φ est définie.

Pour tous $x, y \in E$, le réel $\varphi(x, y)$ est appelé le produit scalaire de x et y. La notation φ n'a rien d'universel : on trouve aussi $(x \mid y)$, $x \cdot y$ ou encore $\langle x \mid y \rangle$.

1.2 Exemples

Exemple 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $E = \mathbb{R}^n$. L'application suivante définit un produit scalaire sur E :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{aligned}$$

avec $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(y_i)_{1 \leq i \leq n}$ les coordonnées de x et y dans la base canonique $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}^n$. Il s'agit du produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

Remarque. En identifiant $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et en notant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(x)$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(y)$, alors :

$$(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = X^\top Y$$

Exemple 2. Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. On pose pour tous $f, g \in E$:

$$\langle f \mid g \rangle := \int_0^1 fg$$

Montrer que l'application $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E.

Pour tous $f, g \in E$, comme f, g sont continues et à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors $\langle f \mid g \rangle$ est bien défini et est un réel.

- **(astuce)** On montre d'abord la symétrie :

$$\langle g \mid f \rangle = \int_0^1 g(t)f(t)dt = \int_0^1 f(t)g(t)dt = \langle f \mid g \rangle$$

Exemple 3. Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. L'application suivante définit un produit scalaire sur E :

$$\begin{aligned} E \times E &\to \mathbb{R} \\ (A,B) &\mapsto \operatorname{tr}(A^\top B) \end{aligned}$$

Il s'agit du produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

1.3 Espaces préhilbertiens réels, espaces euclidiens

Définition 39.4

On dit que (E,φ) est un un espace préhilbertien réel si φ est un produit scalaire défini sur (le $\mathbb{R}$-e.v.) E. Si de plus E est de dimension finie, alors (E,φ) est appelé un espace euclidien.

Par abus, on omettra souvent de préciser φ et on dira juste "E est un espace [...]".

Exemple 4. $\mathbb{R}^n$ est un espace ....
$\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ est un espace ....
$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est un espace ....

Propriété 39.5

Soit E un espace préhilbertien réel dont on note $(\cdot \mid \cdot)$ le produit scalaire. Soit F un s.e.v. de E. Alors l'application

$$\begin{aligned} \psi : F \times F &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto (x \mid y) \end{aligned}$$

est un produit scalaire sur F. Ainsi F est un espace préhilbertien réel (muni du produit scalaire induit ψ).

2 Norme

Hypothèse

Dans le reste du chapitre, E désigne un espace préhilbertien réel, dont on note $(\cdot \mid \cdot)$ le produit scalaire et $||\cdot||$ la norme euclidienne associée (cf définition ci-dessous).

2.1 Définition

Définition 39.6

On appelle norme euclidienne sur E associée au produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$, l'application

$$\begin{aligned} ||\cdot|| : \quad E &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto ||x|| = \sqrt{(x \mid x)} \end{aligned}$$

La notation $||\cdot||$ n'a rien d'officiel, même si, une fois le produit scalaire défini, on sous-entend souvent que $||\cdot||$ est la norme associée à ce produit scalaire s'il n'y a pas ambiguité.

Exemple 5. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$||x|| = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exemple 6. On munit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique. Pour tout $f \in E$

$$||f|| = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Propriété 39.7

La norme euclidienne $||\cdot||$ vérifie les propriétés suivantes :

1. Homogénéité : $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall x \in E \qquad ||\lambda x|| = |\lambda| \times ||x||$
2. Séparation : $\forall x \in E \qquad ||x|| = 0 \implies x = 0_E$
3. Inégalité triangulaire : $\forall x, y \in E \qquad ||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$

De plus, pour tous $x, y \in E$, on a $||x+y|| = ||x|| + ||y||$ si et seulement si x, y sont positivement liés, càd $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+ \qquad x = \lambda y \quad \text{ou} \quad y = \lambda x$.

Remarque. Si $\mathcal{E}$ est un $\mathbb{R}$-e.v. (pas forcément un espace préhilbertien réel), on appelle norme sur $\mathcal{E}$ toute application $||\cdot||$ qui vérifie les assertions 1–2–3 ci-dessus (sans le cas d'égalité). Une telle norme n'est pas nécessairement une norme euclidienne, i.e. il n'existe pas forcément un produit scalaire φ sur $\mathcal{E}$ tel que $||\cdot|| = \sqrt{\varphi(\cdot,\cdot)}$.

Démonstration. Soit $(\cdot \mid \cdot)$ le produit scalaire associé à $||\cdot||$. Soit $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

1.

2.

3. L'inégalité triangulaire sera prouvée ultérieurement.

□

Remarque. La propriété de séparation est en fait une équivalence : pour tout $x \in E$,

$$||x|| = 0 \iff x = 0_E$$

Cela se déduit de l'homogénéité en prenant $\lambda = 0$.

2.2 Identités des normes euclidiennes

Propriété 39.8 (Identités remarquables)

Soit $x, y \in E$.

- $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 + 2(x \mid y)$
- $||x-y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 - 2(x \mid y)$
- $||x||^2 - ||y||^2 = (x+y \mid x-y)$
- $(x \mid y) = \dfrac{1}{2}\left(||x+y||^2 - ||x||^2 - ||y||^2\right)$ (identité de polarisation)

Démonstration. On ne montre que la première assertion et la troisième. Pour la première :

Pour la troisième :

$$\begin{aligned}(x+y \mid x-y) &= (x \mid x)+(y \mid x)+(x \mid -y)+(y \mid -y)\\ &= \|x\|^2+(x \mid y)-(x \mid y)-(y \mid y)\\ &= \|x\|^2-\|y\|^2\end{aligned}$$

□

Remarque. L'identité de polarisation permet notamment d'exprimer le produit scalaire uniquement en fonction de la norme. En particulier, si une norme $\|\cdot\|$ est euclidienne, i.e. construite à partir d'un produit scalaire, alors il n'y a qu'un produit scalaire possible associé à $\|\cdot\|$.

2.3 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 39.9 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Pour tous $x, y \in E$, on a :

$$|(x \mid y)| \leq \|x\| \times \|y\|$$

(Cas d'égalité dans Cauchy-Schwarz :) il y a égalité ci-dessus si et seulement si (x, y) est une famille liée.

Démonstration.

□

Exemple 7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(b_i)_{1\leq i\leq n}$ deux familles de réels. Montrer que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

2.4 Autres inégalités des normes euclidiennes

Preuve de l'inégalité triangulaire (Propriété 39.7)

Démonstration. Soit $x, y \in E$. Montrons que

$$||x+y||^2 \leq (||x|| + ||y||)^2$$

Par identité remarquable :

$$||x+y||^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

De plus, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$(x \mid y) \leq |(x \mid y)| \leq ||x|| \times ||y|| \qquad (*)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}||x+y||^2 &\leq ||x||^2+||y||^2+2||x||\times||y|| \\ &= (||x||+||y||)^2\end{aligned}$$

On en déduit l'inégalité en passant à la racine carrée, car la norme est positive.

De plus, la preuve ci-dessus montre qu'il y a égalité si et seulement si chaque inégalité dans ($*$) est une égalité. On sait que

$$|(x \mid y)| = ||x|| \times ||y||$$

si et seulement si (x, y) est liée. Ensuite, sachant cela, on peut montrer que $(x \mid y) = |(x \mid y)|$ si et seulement si (x, y) est positivement liée, en traitant séparément le cas "$x = 0_E$ ou $y = 0_E$" puis en traitant le reste des cas. □

Propriété 39.10 (Seconde inégalité triangulaire)

Pour tous $x, y \in E$, on a :

$$\Big|\, ||x|| - ||y|| \,\Big| \leq ||x-y||$$

2.5 Distances euclidiennes

Définition 39.11

On appelle distance euclidienne associée au produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$, l'application

$$d: \begin{array}{l} E\times E \to \mathbb{R}_+ \\ (x,y) \mapsto ||x-y|| \end{array}$$

Propriété 39.12

Soit $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ la distance euclidienne associée au produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$. Alors :

1. Séparation : $\forall x, y \in E \qquad d(x,y) = 0 \iff x = y$
2. Symétrie : $\forall x, y \in E \qquad d(x,y) = d(y,x)$
3. Inégalité triangulaire : $\forall x, y, z \in E \qquad d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Remarque. Si $\mathcal{E}$ est un $\mathbb{R}$-e.v. (pas forcément un espace préhilbertien réel), on appelle distance sur $\mathcal{E}$ toute application $d : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ qui vérifie les assertions 1–2–3 ci-dessus. Une telle distance n'est pas nécessairement une distance euclidienne, i.e. il n'existe pas forcément un produit scalaire φ sur $\mathcal{E}$ tel que $d(x,y) = ||x-y||$.

3 Orthogonalité

3.1 Vecteurs orthogonaux

Définition 39.13

Un vecteur $u \in E$ tel que $||u|| = 1$ est dit unitaire.

Exemple 8. Si $u \neq 0_E$, alors $\dfrac{u}{||u||}$ est unitaire.

Définition 39.14

Deux vecteurs $u, v \in E$ sont dits <u>orthogonaux</u> si $(u \mid v) = 0$. On notera alors $u \perp v$.

Remarque. Si $u \perp u$, alors $(u \mid u) = 0$ donc $u = 0_E$.
Si $u \perp v$, alors $v \perp u$: la relation $\perp$ est symétrique. Elle n'est cependant pas réflexive ou transitive (sauf si $E = \{0_E\}$).

Exemple 9. Les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ sont unitaires et orthogonaux deux à deux.

Théorème 39.15 (Théorème de Pythagore)

Deux vecteurs $u, v \in E$ sont orthogonaux si et seulement si

$$||u+v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$$

Démonstration.

□

3.2 Orthogonal d'une partie d'un e.v.

Définition 39.16

Soit A une partie de E. On appelle <u>orthogonal</u> de A l'ensemble

$$A^\perp := \{u \in E \mid \forall a \in A \quad (u \mid a) = 0\}$$

$A^\perp$ est donc l'ensemble des vecteurs u de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de A.

Propriété 39.17

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. $A^\perp$ est un s.e.v. de E.

Démonstration. Soit $u, v \in A^\perp$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Montrons que $\alpha u + \beta v \in A^\perp$.

□

A n'est pas obligatoirement un e.v. ! Par contre $A^\perp$ l'est toujours (un peu comme pour $\text{Vect}(A)$).

Exemple 10. Soit $A = \{(x,0,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$. On vérifie sans peine que

$$A^\perp = \{(0,y,z) \mid y,z \in \mathbb{R}\}$$

Exemple 11. Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $A = \{u_1, u_2\}$ avec $u_1 = (1,0,0)$ et $u_2 = (1,1,1)$. Déterminer $A^\perp$.

Exemple 12. On a $\{0_E\}^\perp =$ .... et $E^\perp =$ ....

Remarque. Si $u \in E$, alors on peut définir la forme linéaire $\varphi_u \in E^*$ par

$$\begin{aligned} \varphi_u : E &\to \mathbb{R} \\ v &\mapsto (v \mid u) \end{aligned}$$

Alors, on a $\{u\}^\perp = \text{Ker}\,\varphi_u$. En particulier, si $u \neq 0_E$, alors φ_u est une forme linéaire non nulle (car $\varphi_u(u) = ||u||^2 > 0$), donc

$$H := \{u\}^\perp = \text{Ker}\,\varphi_u = \{v \in E \mid (v \mid u) = 0\}$$

est un hyperplan de E.

Si H est un hyperplan de E, tout vecteur u non nul tel que $\{u\} \perp H$ (ou encore $u \in H^\perp$) est dit normal à H.

Propriété 39.18

Soit A, B deux parties de E.

1. $A \subset B \implies B^\perp \subset A^\perp$
2. $A^\perp = (\text{Vect}A)^\perp$
3. $A \subset (A^\perp)^\perp$

Démonstration. Montrons la première assertion. On suppose $A \subset B$. Soit $v \in B^\perp$, montrons que $v \in A^\perp$, càd que $\forall a \in A \quad (v \mid a) = 0$. Soit $a \in A$. On a en particulier $a \in B$. Comme $v \in B^\perp$, on a $(v \mid a) = 0$. D'où $v \in A^\perp$ par arbitraire sur a.

Montrons la deuxième assertion. Comme $A \subset \text{Vect}A$, en utilisant la première assertion, on a déjà $(\text{Vect}A)^\perp \subset A^\perp$. Montrons l'autre inclusion. Soit donc $v \in A^\perp$. Montrons que $v \in (\text{Vect}A)^\perp$. Soit $u \in \text{Vect}A$: il suffit de montrer que $(v \mid u) = 0$. Comme $u \in \text{Vect}A$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \cdots, a_n \in A$ et $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$$

Ainsi, par bilinéarité

$$(v \mid u) = \left(v \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (v \mid a_i)$$

Or, $v \in A^{\perp}$, donc $(v \mid a_1) = \ldots = (v \mid a_n) = 0$. D'où $(v \mid u) = 0$. Finalement, $v \in (\mathrm{Vect} A)^{\perp}$. □

4 Familles de vecteurs et orthogonalité

4.1 Familles orthogonales et orthonormées

Définition 39.19

Soit une famille $(u_1, \cdots, u_n)$ de vecteurs de E.

- On dit que la famille $(u_1, \cdots, u_n)$ est orthogonale si les vecteurs $u_1, \cdots, u_n$ sont orthogonaux deux à deux.
- On dit que la famille $(u_1, \cdots, u_n)$ est orthonormée si elle est orthogonale et si les vecteurs $u_1, \cdots, u_n$ sont tous unitaires.

On trouve parfois le terme “orthonormale” au lieu de “orthonormée”.

Exemple 13. Si $(u_1, \cdots, u_n)$ est une famille orthogonale de vecteurs **non nuls** alors

$$\left(\frac{u_1}{||u_1||}, \cdots, \frac{u_n}{||u_n||}\right)$$

est une famille orthonormée.

Propriété 39.20

Toute famille orthogonale de vecteurs **non nuls** est libre.
En particulier, toute famille orthonormée est libre.

Propriété 39.21 (Pythagore généralisé)

Soit $(u_1, \cdots, u_n)$ une famille orthogonale de E. Alors

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} u_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} ||u_i||^2$$

Exemple 14. La diagonale d'un hypercube de côté 1 de $\mathbb{R}^n$ a pour longueur $\sqrt{n}$.

4.2 Bases orthonormées

Définition 39.22

On appelle base orthonormée toute famille de vecteurs de E qui est une base et qui est orthonormée.

Si E est de dimension infinie, alors une base orthonormée contiendra une infinité d'éléments. Mais dans cette section, on se restreindra à des espaces de dimension finie (qu'on notera n).
Si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E et si $x \in E$, on notera x_i la coordonnée selon le vecteur e_i. Autrement dit, on aura $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Enfin, on notera $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$

Propriété 39.23

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormée de E. Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$ deux vecteurs de E.

1. On a $x_i = (x \mid e_i)$. Autrement dit $x = \sum_{i=1}^{n} (x \mid e_i) e_i$.
2. $$(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = X^\top Y \qquad ||x||^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = X^\top X$$

Autrement dit, les bases orthonormées permettent de calculer un produit scalaire, ou une norme comme on le fait dans $\mathbb{R}^n$, les scalaires $(x \mid e_i)$ jouant le rôle des coordonnées selon la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. Avec les notations de la propriété,

Les autres assertions se démontrent de manière similaire. □

Propriété 39.24

Tout espace euclidien possède au moins une base orthonormée.

Démonstration. Sera vue à la fin du chapitre. □

5 Projection orthogonale sur un s.e.v. de dimension finie

5.1 Supplémentaire orthogonal

Lemme 39.25

Soit F un s.e.v. de dimension finie de E. Soit $(e_1, \cdots, e_p)$ une base orthonormée de F. Alors pour tout $x \in E$, le vecteur

$$y := \sum_{i=1}^{p} (x \mid e_i) e_i$$

vérifie $y \in F$ et $x - y \in F^\perp$.

On verra plus tard que le vecteur y est appelé le projeté orthogonal de x sur F parallèlement à $F^\perp$.

Démonstration. Comme $e_1, \cdots, e_p \in F$, par construction on a $y \in F$. De plus, pour tout $j \in [\![1, p]\!]$,

$$\begin{aligned}
(x - y \mid e_j) &= (x \mid e_j) - (y \mid e_j) \\
&= (x \mid e_j) - \left(\sum_{i=1}^{p} (x \mid e_i) e_i \,\middle|\, e_j \right) \\
&= (x \mid e_j) - \sum_{i=1}^{p} (x \mid e_i) \underbrace{(e_i \mid e_j)}_{=\delta_{i,j}} \\
&= (x \mid e_j) - (x \mid e_j) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ainsi, par bilinéarité, $x - y$ est orthogonal à toute combinaison linéaire de $e_1, \cdots, e_p$, donc à tout vecteur de F. D'où $x - y \in F^\perp$. □

Propriété 39.26

Soit F un s.e.v. de E. On suppose F de dimension **finie**. Alors F et $F^\perp$ sont supplémentaires. Le s.e.v. $F^\perp$ est appelé le supplémentaire orthogonal de F.

Démonstration. Soit $(e_1, \cdots, e_p)$ une base orthonormée de F. Montrons que $E = F \oplus F^\perp$.

- Montrons que $F \cap F^\perp = \{0_E\}$. Soit $u \in F \cap F^\perp$. Comme $u \in F^\perp$, u est orthogonal à tout vecteur de F y compris u lui-même. Ainsi
$$0 = (u \mid u) = ||u||^2$$
On en déduit que $u = 0_E$. D'où $F \cap F^\perp = \{0_E\}$.
- Montrons que $E = F + F^\perp$. Soit $x \in E$. On pose $y = \sum_{i=1}^{p} (x \mid e_i) e_i$. Alors par le lemme précédent, on a
$$x = \underbrace{y}_{\in F} + \underbrace{x - y}_{\in F^\perp}$$
D'où, par arbitraire sur x, on a $E = F + F^\perp$. □

Remarque. Lorsque F est de dimension infinie, ce résultat peut tomber en défaut, cf TD.

Propriété 39.27

Soit F un s.e.v. d'un espace **euclidien** E. On a :

- $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$
- $(F^\perp)^\perp = F$

Démonstration. La première assertion découle du fait que $E = F \oplus F^\perp$.
La seconde découle du fait que $F \subset (F^\perp)^\perp$ et que, par la première assertion appliquée à F et à $F^\perp$, on a :

$$\begin{aligned} \dim F + \dim F^\perp &= \dim E \\ \dim F^\perp + \dim (F^\perp)^\perp &= \dim E \end{aligned}$$

D'où F et $(F^\perp)^\perp$ ont la même dimension, ce qui conclut. □

Exemple 15. On suppose que E est euclidien. Soit D une droite vectorielle de E. Montrer que $D^\perp$ est un hyperplan de E.

5.2 Projection orthogonale

Définition 39.28

Soit F un s.e.v. de E. On suppose F de dimension **finie**. On appelle projecteur orthogonal sur F le projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$.
Le vecteur $y \in F$ qui est l'image d'un vecteur $x \in E$ par cette projection est appelé le projeté orthogonal de x sur F.

Notation. On notera p_F ce projecteur dans la suite.

Propriété 39.29

Soit $(e_1, \cdots, e_p)$ une base orthonormée d'un s.e.v. F de E Pour tout $x \in E$, on a :

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} (x \mid e_i) e_i$$

Démonstration. Soit $y = \sum_{i=1}^{p} (x \mid e_i) e_i$. Comme $x = y + (x - y)$, il suffit de montrer que $y \in F$ et que $x - y \in F^\perp$ pour conclure que $y = p_F(x)$. Le Lemme 39.25 permet de conclure. □

Exemple 16 (Projection sur une droite vectorielle)**.** Soit $u \in E$ non nul et $D = \mathrm{Vect}(u)$.

- Si u est unitaire, la famille (u) est une base orthonormée de D, si bien que

$$\forall x \in E \qquad p_D(x) = (x \mid u) u$$

- Si u n'est pas unitaire, la famille .... est une base orthonormée de D, si bien que

$$\forall x \in E \qquad p_D(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On a vu en TD que si F et G sont supplémentaires, alors $p_{F//G} + p_{G//F} = \mathrm{id}_E$.

Exemple 17 (Projection sur un hyperplan)**.** On suppose que E est euclidien. Soit $u \in E$ non nul, $D = \mathrm{Vect}(u)$ et H l'hyperplan $D^\perp$. Comme $p_H + p_D = \mathrm{id}_E$:

- Si u est unitaire, on a :
$$\forall x \in E \qquad p_H(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
- Si u n'est pas unitaire, on a :
$$\forall x \in E \qquad p_H(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Dit autrement, si H est un hyperplan de E (euclidien) et si u est un vecteur normal à H, alors les formules ci-dessus sont valides.

5.3 Distance à un s.e.v. de dimension finie

Définition 39.30

Soit A une partie non vide de E et $x \in E$. On appelle distance de x à A la quantité

$$d(x,A) := \inf_{y \in A} d(x,y) = \inf_{y \in A} ||x-y||$$

Cette quantité est bien définie car l'ensemble $\{||x-y|| \mid y \in A\}$ est une partie non vide (car $A \neq \varnothing$) de $\mathbb{R}$ et minorée par 0.

Propriété 39.31

Soit F un s.e.v. de E. On suppose F de dimension **finie**. Alors il existe un unique $y \in F$ tel que $d(x,F) = d(x,y)$, à savoir $y = p_F(x)$. On a donc :

- $d(x,F) = ||x - p_F(x)||$
- $\forall y \in F \quad d(x,F) = ||x-y|| \iff y = p_F(x)$

Exemple 18 (Distance à un hyperplan)**.** On suppose que E est euclidien. Soit $u \in E$ non nul, $D = \mathrm{Vect}(u)$ et H l'hyperplan $D^\perp$. Alors

$$d(x,H) = ||x - p_H(x)|| = ||p_D(x)||$$

Ainsi :

- Si u est unitaire, on a
$$\forall x \in E \qquad d(x,H) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
- Si u n'est pas unitaire, on a
$$\forall x \in E \qquad d(x,H) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Dit autrement, si H est un hyperplan de E (euclidien) et si u est un vecteur normal à H, alors les formules ci-dessus sont valides.

6 Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Théorème 39.32 (Orthonormalisation de Gram-Schmidt)

Soit $\mathcal{F} = (u_1, \cdots, u_n)$ une famille **libre** de E. Alors il existe une unique famille orthonormée $(e_1, \cdots, e_n)$ de E telle que

$$\forall p \in [\![1, n]\!] \qquad \text{Vect}\,(e_1, \cdots, e_p) = \text{Vect}\,(u_1, \cdots, u_p) \qquad \text{et} \qquad (e_p \mid u_p) > 0 \tag{$*$}$$

En construisant la famille $(e_1, \cdots, e_n)$, on dit qu'on a "orthonormalisé" la famille libre $(u_1, \cdots, u_n)$.

On ne montrera que l'existence. La preuve est basée sur une construction explicite des vecteurs $e_1, \cdots, e_n$ et se base sur la méthode ci-dessous. Il faut savoir l'appliquer à des cas particuliers.

Méthode (Algorithme de Gram-Schmidt)

Soit $(u_1, \cdots, u_n)$ une famille libre de E. On construit la famille orthonormée $(e_1, \cdots, e_n)$ qui vérifie $(*)$ de manière récursive.

1. Pour e_1, on pose $e_1 = \dfrac{u_1}{||u_1||}$. Le vecteur e_1 est bien unitaire et $(*)$ est vérifiée avec $p = 1$.
2. Soit un entier $k \geq 2$. On suppose avoir construit $(e_1, \cdots, e_{k-1})$ vérifiant $(*)$ pour tout $p \in [\![1, k-1]\!]$. On construit e_k de la manière suivante.
   (a) On calcule le projeté orthogonal de u_k sur $F := \text{Vect}(e_1, \cdots, e_{k-1})$, qu'on notera Π_k. Comme $(e_1, \cdots, e_{k-1})$ est une base orthonormée de F, on a :
   $$\Pi_k := \sum_{i=1}^{k-1} (u_k \mid e_i) e_i$$
   (b) On construit un vecteur ε_k qui est dans $F^\perp$, donc orthogonal à tous les vecteurs $e_1, \cdots, e_{k-1}$ en posant
   $$\varepsilon_k := u_k - \Pi_k$$
   (c) Le vecteur ε_k est non nul [a], on peut donc le normaliser en posant :
   $$e_k := \frac{\varepsilon_k}{||\varepsilon_k||}$$

On répète l'étape 2 jusqu'à $k = n$. On construit ainsi une famille orthonormée $(e_1, \cdots, e_n)$, qui vérifiera $(*)$.

a. Si $\varepsilon_k = 0$, on aurait $u_k = \Pi_k \in F$, donc u_k serait dans $\text{Vect}\,(e_1, \cdots, e_{k-1}) = \text{Vect}\,(u_1, \cdots, u_{k-1})$, ce qui est absurde car $(u_1, \cdots, u_k)$ est libre.

Par construction, $(e_1, \cdots, e_n)$ est bien une famille orthonormée. Justifions que $(*)$ est vérifiée. On a tout d'abord pour tout $k \in [\![1, n]\!]$

$$(e_k \mid u_k) = (e_k \mid \varepsilon_k + \Pi_k) = (e_k \mid \varepsilon_k) + 0 = \frac{1}{||\varepsilon_k||} (\varepsilon_k \mid \varepsilon_k) = ||\varepsilon_k|| > 0$$

Enfin, étant donné $1 \leq k \leq p \leq n$, on a

$$u_k = \underbrace{\Pi_k}_{\in \text{Vect}(e_1, \cdots, e_{k-1})} + \underbrace{\varepsilon_k}_{\in \text{Vect}(e_k)} \in \text{Vect}(e_1, \cdots, e_k) \subset \text{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$$

Ce qui permet de montrer que $\{u_1, \cdots, u_p\} \subset \text{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$. On en déduit

$$\text{Vect}(u_1, \cdots, u_p) \subset \text{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$$

Or, comme les deux familles $(u_1, \cdots, u_p)$ et $(e_1, \cdots, e_p)$ sont libres, les deux “Vect” ci-dessus sont de même dimension p. On en déduit qu'ils sont égaux.

Exemple 19. On se place sur $E = \mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$(f \mid g) := \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$$

Appliquer l'algorithme de Gram-Schmidt sur la famille (f, g, h) avec $f : x \mapsto 1$, $g : x \mapsto \cos x$ et $h : x \mapsto \cos^2 x$.

Propriété 39.33

Tout espace euclidien possède des bases orthonormées.

Démonstration. Soit E un espace euclidien et $n = \dim E$. Il suffit de se donner une base de cet espace (qui existe puisque tout e.v. admet des bases) et de l'orthonormaliser. On aura une famille $(e_1, \cdots, e_n)$ orthonormée, donc libre, qui a le même cardinal que la dimension de E. Donc c'est une base orthonormée. $\square$